Wolfgang Neumeyer, Prof. Dr. Michael Rychlik

Eine sehr poetische und künstlerische Seite der scheinbar trockenen Mathematik:

Die getörnten tönernen Töchter der schleierhaften Möbiusschleife

Möbiusband aus einem Gürtel

Folgendes Manuskript wird vor allem für solche Bildhauer und Goldschmiede interessant sein, die sich für mathematische Formen begeistern; und das eigenwillige, elektrisierende Möbiusband ist *das* Vehikel, um in eine ganze Landschaft gleich faszinierender Figuren einzutauchen.

Wo steht das Möbiusband? Will sagen, erstens: an welchem Punkt steht es stabil auf waagerechter Ebene und zweitens: wo steht es in einer immensen Liste mehr oder weniger verwandter Figuren? Zwei Fragen, zu der sich gleich eine dritte gesellt: wie viele verschiedene Möbiusbänder gibt es?

Beschreibung: dafür wird gern eine Bastelanleitung zu Hilfe genommen: man nehme einen Streifen Karton und verklebe die beiden Enden um 180 Grad verdreht miteinander. Die seltsame Topologie der so gewonnen Schleife wird im Kasten 1 auf Seite 10 erläutert.

Stellt man es vor einen Spiegel oder man vollführt den „Törn“ (von engl.: to turn: sich oder etwas umdrehen, oder z.B. eine Segeltörn machen) beim Verkleben in die entgegengesetzte Richtung, so sieht man: eben dessen Spiegelbild (Abb.1 a) und b)). Damit sich aber niemand hinters Licht geführt fühlen mag: es gibt tatsächlich noch mehr Möbiusbänder: so wie obiges aus einem **geraden** Streifen Karton gefertigt wurde, kann man auch eines aus einem **kreisförmigen** Streifen

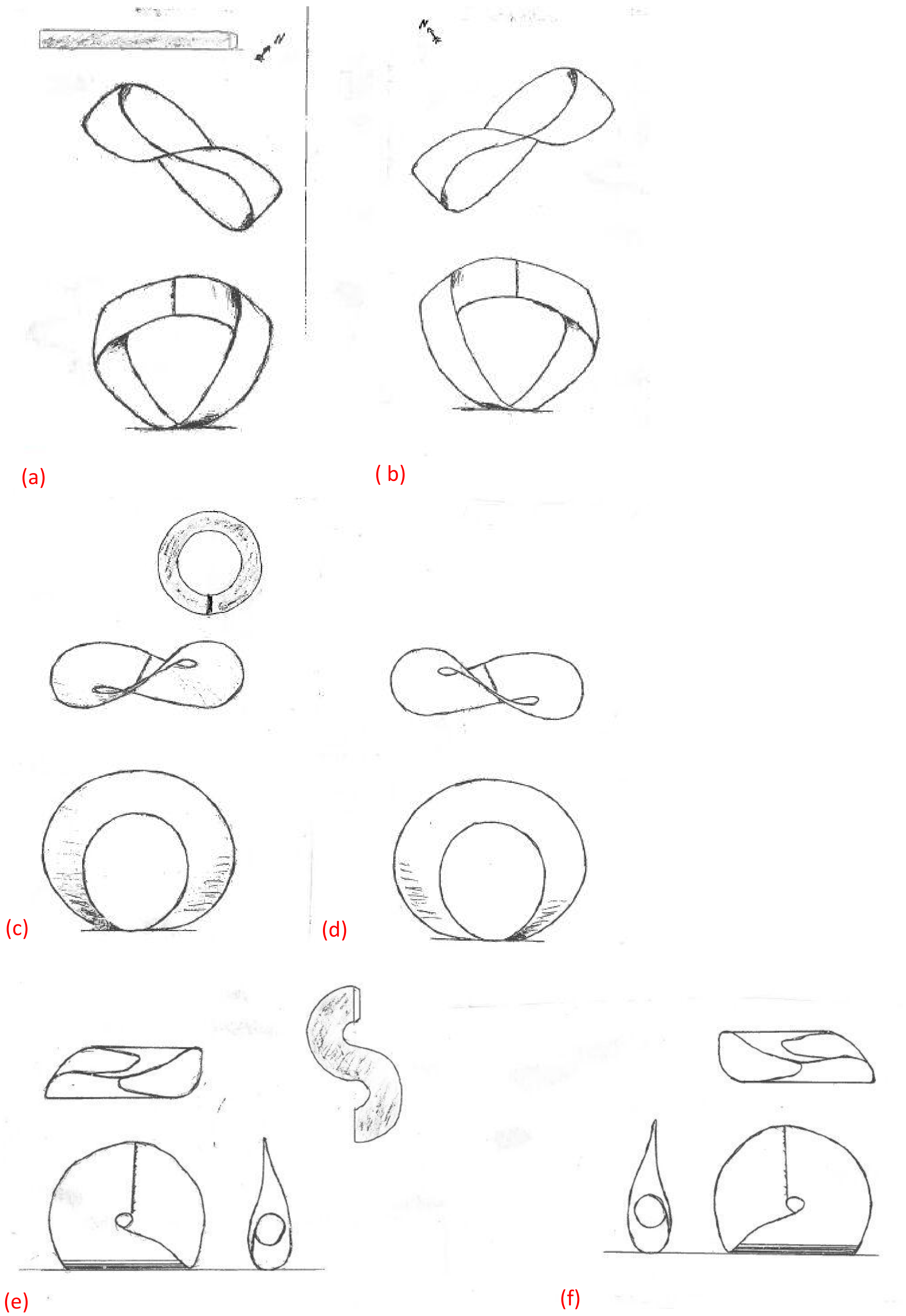


Abbildung 1 : Möbiusbänder a) – f), für jedes verschiedene Ansichten:

in grau die Schnittmuster als Bastelanleitung, darunter verschiedene Ansichten

(Abb.1 c) und d)) und aus einem **S-förmigen** (Abb.1 e) und f)) formen.

Das Band aus kreisförmigem Ursprung kann allerdings nur auf seiner Klebefläche stehen, und das aus „S"-förmigem gar nicht.

Gleich ist allen die Topologie und neben den topologischen Gemeinsamkeiten auch noch die unbestreitbare Eleganz. Es sollte nicht verwundern, wenn ja der ein oder andere Goldschmied schon mal die eine oder andere dieser Formen materialisiert hätte. Als Ohrringe, dazu noch spiegelbildlich gepaart…! Wow!

Eine Beschreibung dieser **Bänder** haben wir trotz intensiver Recherche nirgends finden können. Ebenso fehlt noch, wenn man sich verbal exakt über diese Formen unterhalten möchte, eine Definition für „Rechts-„ oder „ Linksverdrehung". Unser Vorschlag dazu: Man nehme das Band an der Klebestelle zwischen Daumen- und Zeigefinger und schaue von oben auf die Verklebung. Das Band schraubt sich jetzt nach unten, entweder rechtsgängig im Uhrzeigersinn oder linksgängig gegen den Uhrzeigersinn.
Auch den folgenden Katalog konnten wir nirgends ausmachen, daher fehlen noch für viele der Formen Bezeichnungen oder Namen.

KATALOG DER MÖBIUSKÖRPER

Wir betrachten nun eine Gerade als ein Zweieck und haben dieses durch Verbreiterung von der ersten Dimension in die zweite zu einem langgezogenen Rechteck geformt. Aus diesem Rechteck entsteht durch Verdrillung der Enden das Möbiusband. Wenn wir aber aus dem zweidimensionalen Vieleck in die dritte Dimension übergehen, können wir z.B. aus einem gleichseitigen Dreieck eine langgestreckte Säule mit dreieckigem Querschnitt erschaffen. Es dämmert schon! Deren Enden werden nun um 120 Grad verdreht miteinander verbunden, dass jede Seite und Kante in die Nachbarseite und Kante übergeht. Das gleiche Vorgehen ist auch um 240 Grad möglich und beide Körper sind in Abb. 2 gezeigt.

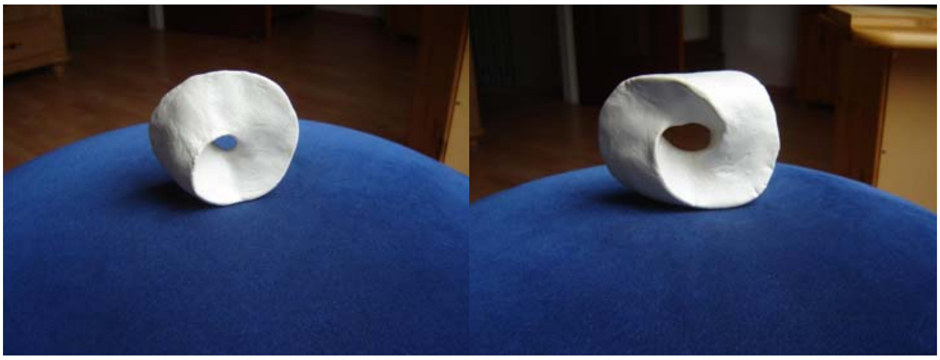


Abbildung 2 : Möbiuskörper (beides Einkant) mit Kantenverschiebung

(a) um 120 ° (b) um 240 °

Diese Körper haben nur **eine Seite** und **eine Kante,** sind also nicht orientierbar; wir nennen diese Eigenschaft provisorisch „seltsam“. Man könnte sie auch als “Möbiuskörper“ bezeichnen, aber auch „Einkant“ wäre denkbar.

Verdrillt man die genannte Säule um 360 Grad, sieht das Ergebnis zwar ähnlich aus, ist aber wieder wie sein Ursprung ein echtes „Dreikant“ („der“ oder „das“?). Das ist erkennbar, wenn man alle drei Seiten und Kanten **verschieden einfärbt** (Abbildung 3).

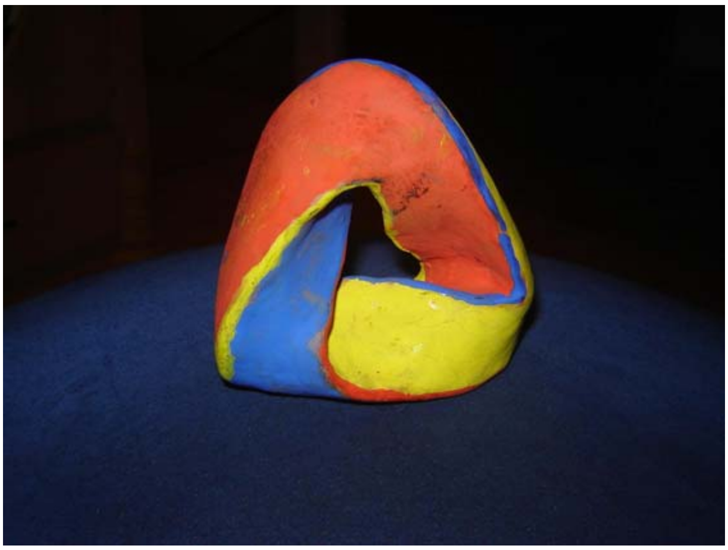


Abbildung 3 : Möbiuskörper mit Kantenverschiebung um 360 ° (Dreikant)

Es gibt aber auch Möbiuskörper, die weder „seltsam“ noch „nicht-seltsam“ sind: man verdrehe eine quadratische Säule „einfach“ (90 Grad), so ist die Figur „seltsam“, bei zweifacher Verdrillung hat sie nur noch zwei, statt der ursprünglichen vier Seiten, ist also vielleicht „halb-seltsam“, bei dreifacher „seltsam“ und bei vierfacher wieder „ nicht-seltsam“.

Ungleichseitige Vielecke, so z. B. einen länglichen Quader mit rechteckigem nicht-quadratischen Querschnitt kann man allerdings nur um Vielfache von 180 Grad verdrehen, und er kommt daher nie über die „Halbseltsamkeit“ hinweg.

Da ein Streifen Karton ein dreidimensionales Objekt mit Länge, Breite und Dicke ist, gehören alle papiernen Möbiusbänder an diese Stelle des Katalogs. In deren Mitte aber, auf halber Papierstärke, befinden sich unsichtbar „platonische“ Bänder mit „null Dicke“.

Diese sind die sechs platonischen Möbiusbänder der Abb. 1, die, da aus Zweiecken geformt, am Anfang dieser umfangreichen Liste stehen. Über die Vielecke mit den verschiedenen Torsionen gelangen sie bis hin zum Unendlich-Eck als Querschnitt, dem Kreis, welcher dann den Torus bildet, dem man keine Verdrehung mehr ansehen kann.

Ja, es fehlt noch was: diejenigen **Körper, die keine Verdrillung** erfahren, kann man sie Möbiuskörper nennen? Eine Dreikantsäule z.B. kann auf viele Arten zu einem Ring geformt werden:

a): mit einer Kante „innen“ und einer Seite „aussen“, b): umgekehrt (Abbildung 4) und c): alle Varianten, die zwischen ersteren existieren.

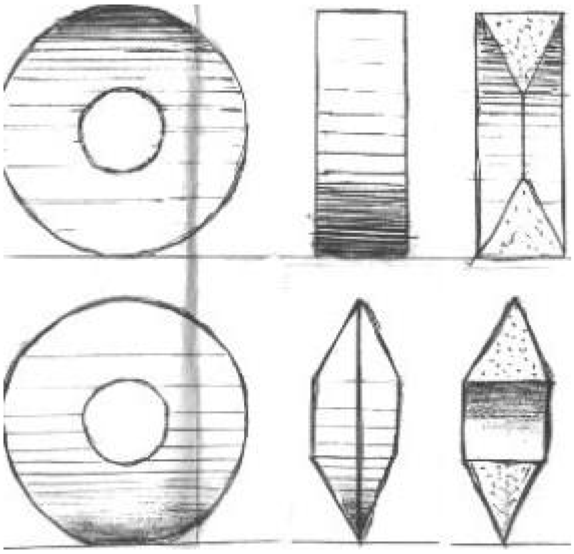


Abbildung 4 : Ansichten von Möbiuskörpern mit dreieckigem Querschnitt ohne Verdrillung mit “innerer Kante” (oben) und “äußerer Kante” (unten)

Wenn man diese Körper als Möbiuskörper mit null Verdrehung ansieht, muss man einen Papierring als Möbiusband ohne Verdrehung akzeptieren (Abb.5)

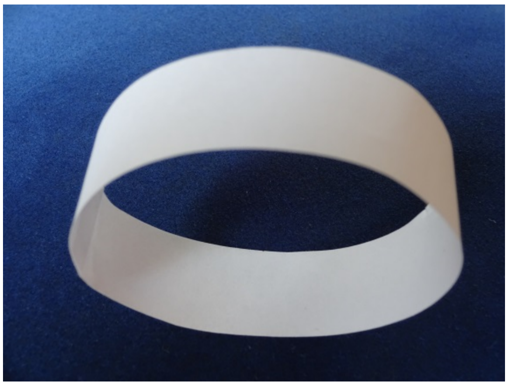


Abbildung 5 : Aus einem Rechteck geformter Papierring als „Möbiusband“ ohne Verdrehung der schmalen Seiten vor dem Zusammenkleben

Wenn ein Punkt als komprimierte Linie die „nullte Dimension“ repräsentiert, tun dies auf andere Weise solche Ringe und das platonische Möbiusband auch? Eher nein; trotz fehlendem Volumen und Gewicht betten sich diese Formen in den dreidimensionalen Raum. Folglich könnte man **alle** Elemente der Liste als „Möbiuskörper“ benennen. Eine vorläufige Klassifizierung ist in Tabelle 1 vorgeschlagen. Das Möbiusband ist danach nur eine herausgehobene Variante einer unendlichen Vielzahl an Körpern.

Tabelle 1: Klassifizierung von Möbiuskörpern

„Möbiuskörper“: Trivialname	Querschnitt	Anzahl der „Ecken“ n im Querschnitt	Verdrehung um	Beispiel
	Linie	n=2		
Ring			0 °	Abb. 5
Möbiusband			180 °	Abb. 1 (a) und (b)
„Trommel“			360 °	Abb. 9
	Gleichseitiges Dreieck	n=3		
„Innenkant“ und „Außenkant“			0 °	Abb. 4
„Einkant“			120 °	Abb. 2 (a)
„Einkant“			240 °	Abb. 2 (b)
„Dreikant“			360 °	Abb. 3
	Quadrat	n=4		
„Vierkant“			0 °	
„Einkant“			90 °	
„Zweikant“			180 °	
„Einkant“			270	
„Vierkant“			360 °	
	Gleichseitiges n-Eck	n		
Torus			0 °	Für $n \to \infty$
Torus			usw., in Schritten zu 360 °/n	Für $n \to \infty$

Andererseits wird aus einem platonisch zweidimensionalen Möbiusband bei einer Überführung in die platonisch erste Dimension zwangsläufig ein deformierter Ring, dem man die Verdrehung nicht mehr ansieht.

Der Einfachheit und Kürze wegen könnten einzelne Mitglieder z.B. heißen: „einfach l/r verdrehtes Band“ (Abb. 1(a) oder(b)) oder „dreifach verdrehter l/r Quader“ , vielleicht noch mit einem Hinweis auf den Grad der „Seltsamkeit“. Diesen Term entnahmen wir dem Kultbuchautor von „Gödel, Escher, Bach“, Douglas Hofstatter aus dem Titel seines Folgebuches „I am a strange loop / Ich bin eine seltsame Schleife“.

Möbiuskörper mit sternförmigem Querschnitt

Nun stelle man sich einen langgezogenen Mercedesstern (Abbildung 6) vor wie ein Spritzgebäck, und verbinde diese Enden.

Man erhält diese Kringel auch, indem man einem getrockneten tönernen Möbiuskörper dreieckigen Ursprungs Material entzieht (durch Kratzen), und zwar von der Seitenmitte zum Mittelpunkt hin.

Das Kuriose daran: hat man die Hälfte an Volumen (Ton) abgetragen, so hat sich die Oberfläche leicht vergrößert, aber die Gestalt hat sich im Aussehen kaum verändert; treibt man dieses Spiel weiter ins Extreme, bis die Sternarme so dünn wie Papier werden (in Gedanken), haben wir zur Gruppe der polyedrischen und sternförmigen Möbiuskörper noch die strahlenförmigen, die jedoch schon wieder in Richtung Körperlosigkeit abschweben. Nach oben vorgeschlagener Nomenklatur könnte man diese z. B. „zweifach verdrehter l/r Vierstern“ oder „dreifach verdrehter l/r Fünfstrahl“ nennen.

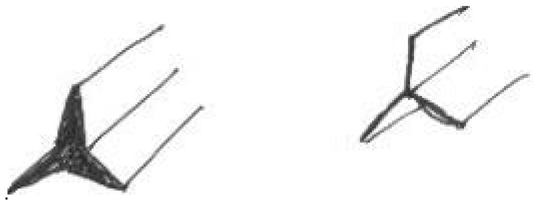


Abbildung 6 : Ansichten von stern- und strahlenförmigen Querschnitten

Die Möbiuskörper „Amy, Mary und Marylin“

Eine frühere Version dieses Berichts, noch ohne die Möbiusbänder, betitelte sich „Amy, Mary und Marilyn“.

„Amy“, wegen des dreieckigen „A“s und den drei Buchstaben für die dreiseitigen Formen um 360 Grad verdreht (Abbildung 3) oder unverdreht, denen man ein dreifarbiges Gala-Gewand verpassen kann, und zum Andenken an die Jahrhundertstimme aus dem Club 27 (=3x3x3, das Alter, in welchem u. a. Amy Winehouse, J. Hendrix, J. Choplin, J. Morrison starben);

„Mary“ mit „M“ wie „Möbius“ für die einfach verdrehte Schleife aus dreikantigem Ursprung (Abbildung 2a), wegen Anhimmelung der gleichnamigen betörenden Pflanze, die ich (W.N.) auch damals vor ca. fünfzehn Jahren in Lanzarote törnte, wobei ich einer tönernen Dreieckswurst erstmals den richtigen Törn gab;

und mit einer Silbe und einer Seitenverschiebung mehr „Marilyn“ (Abbildung 2b) in Anbetracht ihrer betörenden Schönheit.

Wollte man alle Varianten wie in Tabelle 1 schematisch auflisten, entstünde ein Fraktal, ähnlich struppigem Gebüsch, in das man sich an jeder beliebigen Stelle hineinzoomen kann.

Leider sind die Fotos und Videos unzureichend, und selbst dreidimensionale Computeranimationen können der wirklichen Schönheit dieser “Objekte” nicht gerecht werden. Selbst die in einer Minute aus Papier hergestellten Basteleien, wenn man sie in der Hand etwas drückt oder zieht, aus allen Winkeln betrachtet, sind faszinierend und können einen Künstler zu großen Objekten aus vielfältigen Materialien verführen, oder gar zu einer ganzen Kollektion kleiner Ohrringe, mit und ohne “Sollbruchanwendungen”, noch dazu spiegelbildlich gepaart (z.B. den Druck von Maurit Cornelis Escher “Möbiusband I ”).

Hinter dem Laptop erstreckt sich ein kleiner Teil eines welligen Meeres zweidimensionaler papierner Uroboros, und vielleicht konnten wir neugierig machen.

KASTEN 1

Was ist Topologie?

Dieser Zweig der Mathematik befasst sich nicht mit Grössen oder Mengen, sondern mit dem Wesen der Dinge; er wurde Mitte des neunzehnten Jahrhunderts von August Ferdinand Möbius eingeläutet.

Die seltsamen topologischen Eigenschaften des Möbiusbandes

Das Besondere bei diesem Objekt ist zunächst die **Nichtorientierbarkeit**, wie die Mathematiker es ausdrücken, d.h. man kann Vorder- und Rückseite nicht verschieden einfärben, da das Band durch das Prozedere nur noch eine Seite und eine Kante besitzt.

Wenn man vor dem Verkleben eine **Sollbruchlinie** entlang der Mittellinie einritzt, diese **am fertigen Band aufbricht,** entsteht eine doppelt so lange und halb so breite Schleife, anstatt in zwei Stücke zu zerfallen. Diese aber ist wieder orientierbar, da zwei Verklebungen auf ihrer Länge auftauchen und die Summe der Verdrehungen 360° ergibt (Abb. 7 und 8).

Ein ähnliches Band erhält man mit zwei Sollbruchanwendungen, je auf einem Drittel der Breite, das Band am Rand; aus der Mitte löst sich allerdings eins mit Originallänge und unveränderter Topologie, bleibt aber wie ein Kettenglied mit ersterem verbunden.

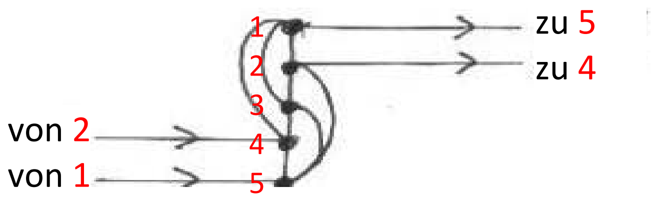
Verbindung von Punkten: Im Gegensatz zu einer "normalen" Fläche, auf welcher maximal vier Punkte ohne Kreuzung miteinander verbunden werden können, sind es auf einer "Möbiusfläche" fünf Punkte. Das Band sollte aber aus möglichst dünnem Pauspapier gefertigt sein und die Aktion mit durchdringender Tinte ausgeführt. Dies verdeutlicht die "Zweidimensionalität", die Körperlosigkeit des "wahren, idealen, platonischen" Möbiusbandes. Um den Tüftlern unter den Lesern den Spaß nicht zu verderben, wurde die Zeichnung in den Kasten 2 gestellt.

KASTEN 2

Kreuzungsfreie Verbindungen

Fünf Punkte kann man nur auf einem "Möbiusband" der Dicke 0 ohne Kreuzungen verbinden.

Verbindungsmöglichkeiten von vier Punkten auf einer normalen Fläche



Verbindungsmöglichkeiten von 5 Punkten auf einem Möbiusband der Dicke 0

KASTEN 3

Die selbstdurchdringende Möbiusschleife

In Abb. 7 sehen wir eine **sich selbst durchdringende** Möbiusschleife, die ein Spiegelbild von sich selbst ist (bei Blick von der Rückseite).

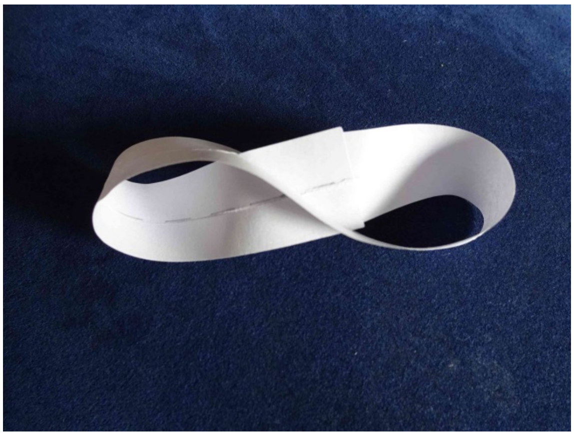


Abbildung 7 : eine **sich selbst durchdringende** Möbiusschleife

Wendet man bei dieser die mittige Sollbruchlinie an, entsteht die Figur, die an einen **Notenschlüssel** erinnert, gleich zweimal (Abb. 8).

Abbildung 8: Sequenz des Aufreissens einer **sich selbst durchdringenden** Möbiusschleife an der Sollbruchstelle. Es entsteht eine der in Abb. 11 dargestellten Möbius(doppel)schleifen.

KASTEN 4

Doppelverdrillung

Die in Abb. 8 dargestellte Möbius(doppel)schleife ist zweifach verdrillt. Die Verdrillung kann man jedoch nicht einfach herstellen, indem man die Enden lediglich um 360 Grad verdrillt, das ergibt „nur“ eine Art “Trommel für Evel Knievel” (Abb. 9).

Abbildung 9: um 360 ° verdrillte Enden eines Papierringes

KASTEN 5

Die Möbiusdoppelschleife

Um eine in Abb. 8 dargestellte Möbius(doppel)schleife zu basteln, muss man vielmehr ein Ende des Papierstreifens zwischen Daumen und Zeigefinger und vom Körper wegweisend, den Mittelteil nach unten drehen, vorne, wieder hoch und nochmals nach unten und hinten, bis die beiden Enden verbunden werden können (Abb. 10).

Abb. 10:
Basteln einer Möbiusdoppelschleife

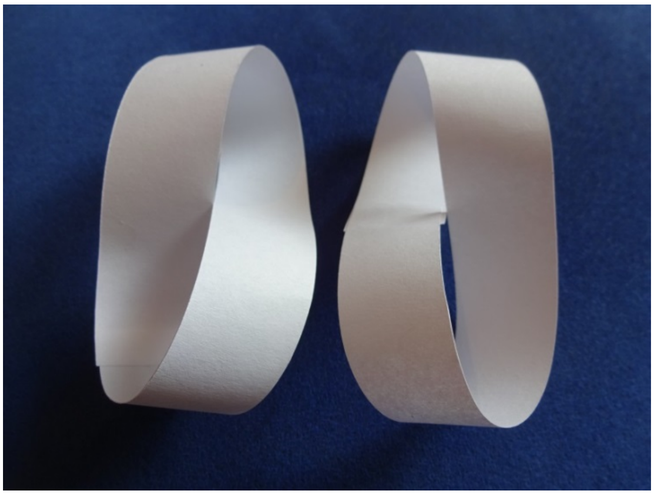


Abb. 11: Durch zweifache Verdrehung eines Papierstreifens erhaltene , spiegelbildliche Möbiusdoppelschleifen

Die Enden können dann rechts oder links vom Mittelteil der Schleife verbunden werden, man erhält dann zwei (Doppel)-Schleifen, die sich wie Bild und Spiegelbild verhalten (Abb. 11). Wenn man den Gedanken weiterspinnt, lässt sich im Umkehrschluss aus jeder dieser Doppel-Schleifen, solange sie dünn und lang genug ist, eine selbstdurchdringende Schleife nach Abb. 8 erzeugen.